

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT)

1. Podstawy obliczenie DFT.

Porównanie czasów obliczenia DFT i szybkiej transformaty Fouriera FFT.

Złożoność obliczeniowa DFT jest proporcjonalna do:

$$t \approx N^2$$

Złożoność obliczeniowa DFT jest proporcjonalna do:

$$t \approx \frac{N}{2} \log_2 N$$

Porównanie złożoności obliczeniowej DFT i FFT:

$$N = 8$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 5.333333$$

$$N = 16$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 8.000000$$

$$N = 32$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 12.800000$$

$$N = 64$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 21.333333$$

$$N = 128$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 36.571429$$

$$N = 256$$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 64.000000$$

Porównanie rzeczywistych czasów wykonania DFT i FFT:

$$N = 8$$

czas wykonania FFT $t_{\text{FFT}} = 0.016000$

czas wykonania DFT $t_{\text{DFT}} = 0.018999$

$$t_{\text{DFT}}/t_{\text{FFT}} = 1.187438$$

$$N = 16$$

czas wykonania FFT $t_{\text{FFT}} = 0.017999$

czas wykonania DFT $t_{\text{DFT}} = 0.022000$

$$t_{DFT}/t_{FFT} = 1.222290$$

$$N = 32$$

czas wykonania FFT $t_{FFT} = 0.017000$

czas wykonania DFT $t_{DFT} = 0.023000$

$$t_{DFT}/t_{FFT} = 1.352941$$

$$N = 64$$

czas wykonania FFT $t_{FFT} = 0.017000$

czas wykonania DFT $t_{DFT} = 0.025000$

$$t_{DFT}/t_{FFT} = 1.470588$$

$$N = 128$$

czas wykonania FFT $t_{FFT} = 0.019000$

czas wykonania DFT $t_{DFT} = 0.029000$

$$t_{DFT}/t_{FFT} = 1.526316$$

$$N = 256$$

czas wykonania FFT $t_{FFT} = 0.016000$

czas wykonania DFT $t_{DFT} = 0.054001$

$$t_{DFT}/t_{FFT} = 3.375063$$

Do skalowania prążków DFT na odpowiednie częstotliwości użyto funkcji o następującym kodzie:

```
function [f] = m2freq (m, fs)
```

```
N = length(m);
```

```
mnoznik=fs/N;
```

```
f=mnoznik*m;
```

Porównując czasy obliczenia DFT i FFT dla krótkich sygnałów nie zauważamy różnicy; zwiększając jednak długość sygnału różnice w długości trwania obliczeń stają się już znaczne. Tak więc dla bardzo krótkich sygnałów nie opłaca się wytaczać tak mocarnego narzędzia jakim jest szybka transformata Fouriera; znaczną korzyść z jej stosowania osiągamy jednak już przy sygnałach o długości 64 próbek.

2. Próbkowanie widma ciągłego.

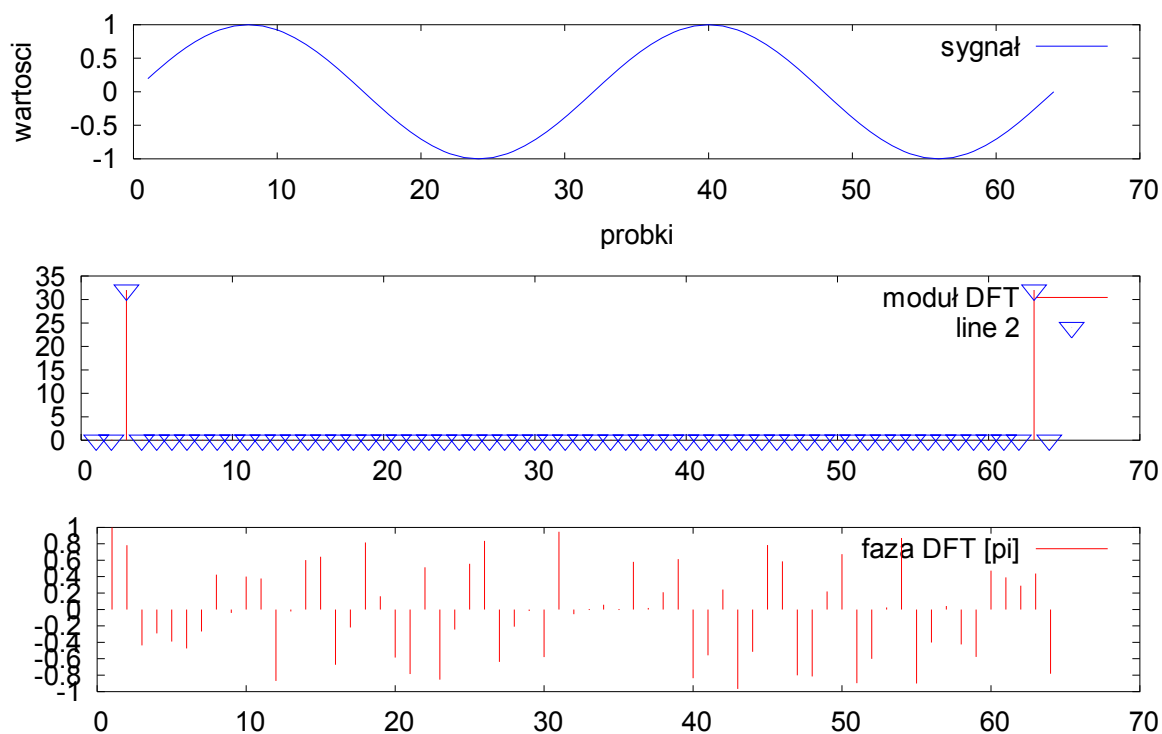
Wyznaczenie DFT dla sygnału sinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów.

Parametry:

$$f_{\text{syg}} = 2\text{Hz}$$

$$f_p = 64\text{Hz}$$

$$N = 64$$



Rys. 1 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 2Hz

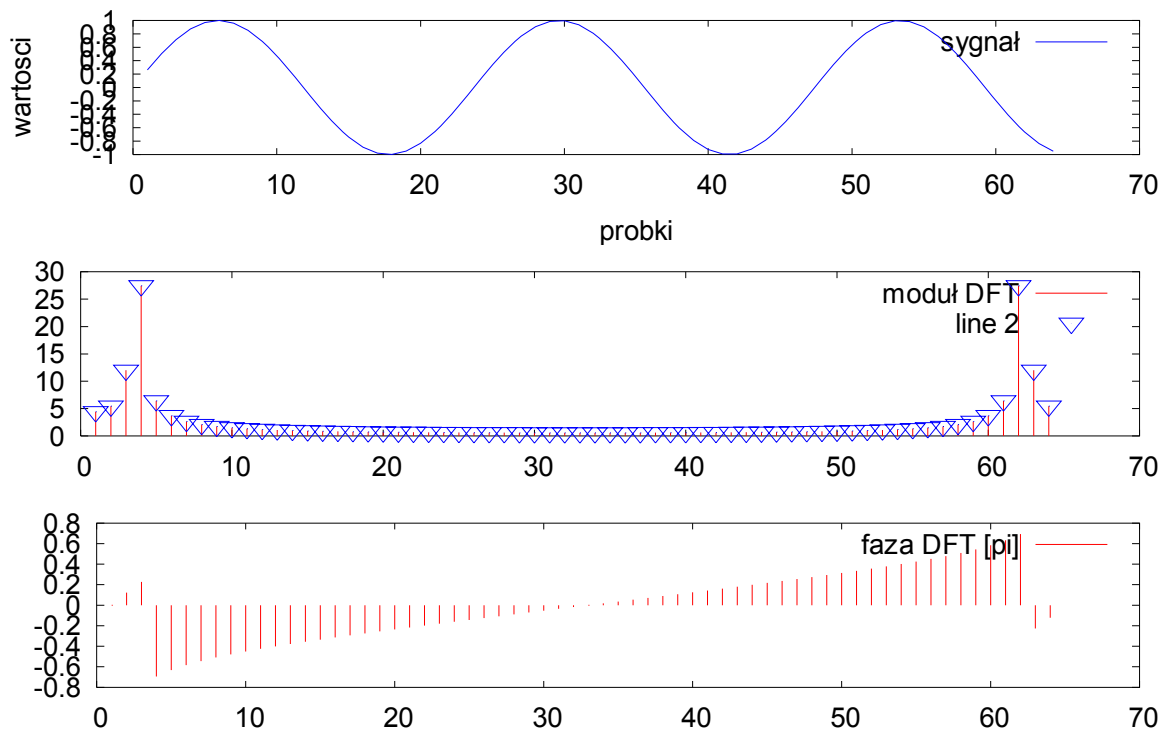
Wyznaczenie DFT dla sygnału sinusoidalnego o całkowitej liczbie okresów.

Parametry:

$$f_{\text{syg}} = 2,7\text{Hz}$$

$$f_p = 64\text{Hz}$$

$$N = 64$$



Rys. 2 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 2,7Hz

Jak widać na powyższych rysunkach dokładną DFT można wyznaczyć tylko dla sygnału o całkowitej liczbie okresów w N próbkach. Dla sygnału o nie całkowitej liczbie okresów obserwujemy przeciek widma (na rys. 2 widać więcej niż jedną częstotliwość). Analitycznie warunek na przeciek widma można zapisać następująco:

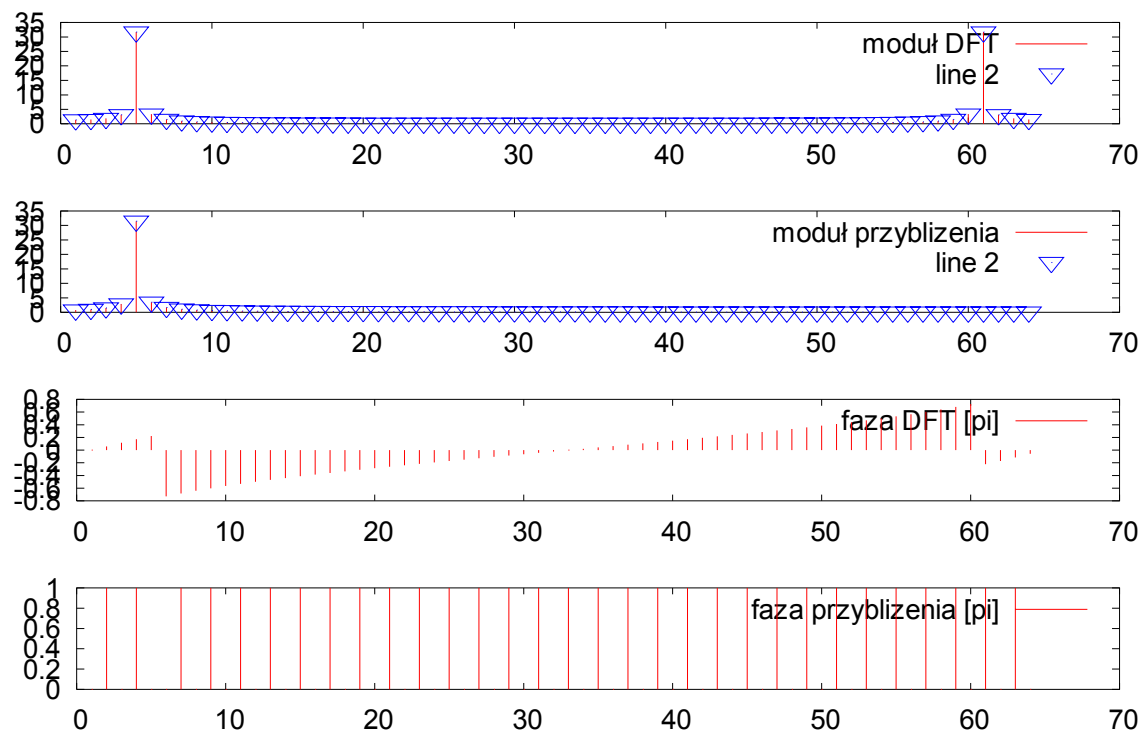
$$f_{\text{syg}} \neq f_{\text{prób}} \cdot \frac{m}{N}$$

Obserwacja efektu przybliżenia DFT funkcją:

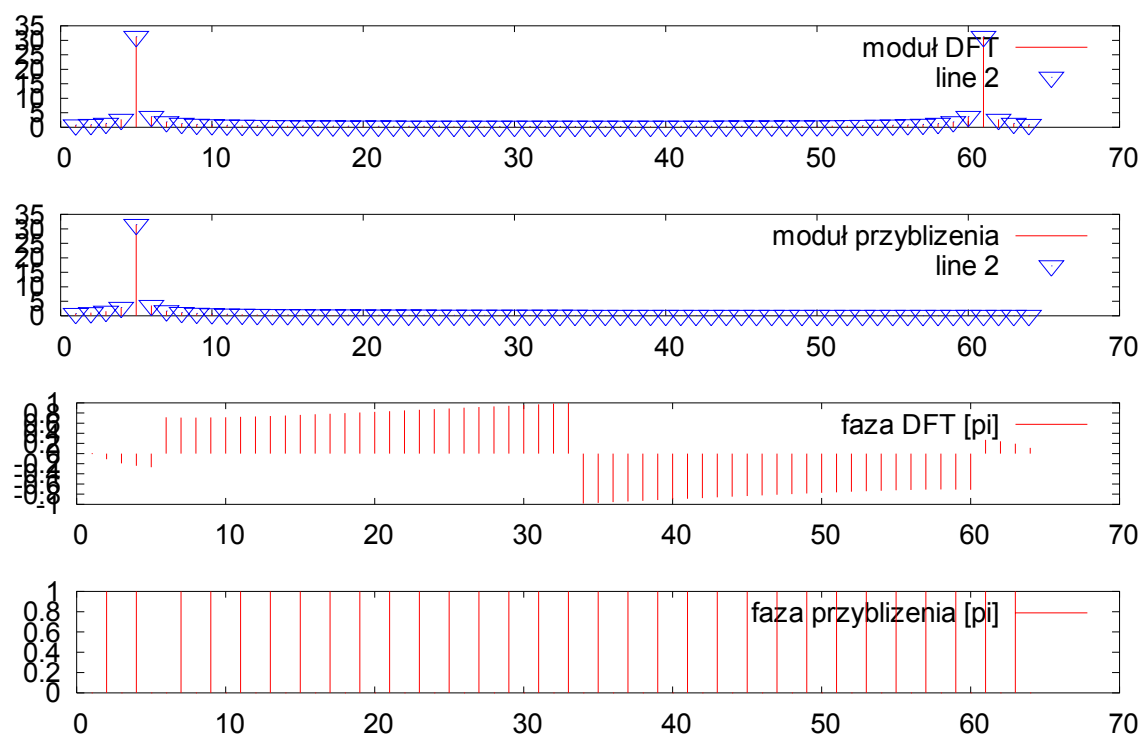
$$X(m) = \frac{N \sin(\pi(k - m))}{2\pi(k - m)}$$

gdzie:

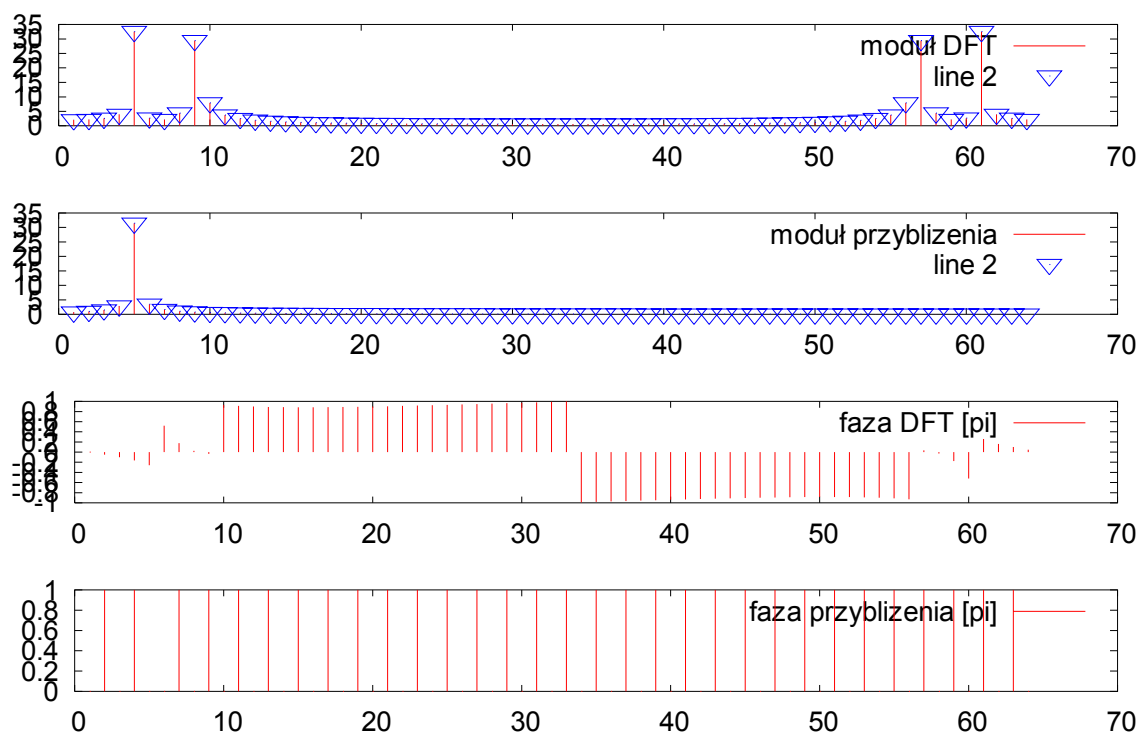
- m -częstotliwość dyskretna
- k -liczba okresów w N próbkach



Rys. 3 Porównanie DFT sygnał cosinusoidalny o częstotliwości 4,1Hz



Rys. 4 Porównanie DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4,1Hz



Rys. 5 Porównanie DFT sygnał sumy dwóch sinusoid.

Z rys. 3 i 4 wynika, że można stosować przybliżenie przy wyznaczaniu modułu dla funkcji sinus i cosinus. DFT jest to przekształcenie dla sygnałów zespolonych, dla sygnałów rzeczywistych wartości wyjściowe zespolone DFT (tzn. argumentów $m \geq \frac{N}{2} - 1$) są nadmiarowe. Dlatego właśnie pojawiają się prążki o częstościach dużo kilkunastokrotnie wyższych od częstotliwości sygnału.

Za pomocą przybliżenia nie można wyznaczyć fazy. Ze wzoru (1) nie można wyznaczyć DFT dla sygnału o całkowitej liczbie okresów w N próbkach. Za pomocą przybliżenia nie można wyznaczyć DFT sygnałów będących sumami sinusoid (każdy sygnał można rozłożyć na sumę sinusoid). Przybliżeniem (1) można wyznaczyć jedynie moduł pojedynczej funkcji sinus bądź cosinus.

3. Zwiększanie rozdzielczości DFT.

Rozdzielczość DFT wynosi:

$$f_a = \frac{1}{N} f_{prób}$$

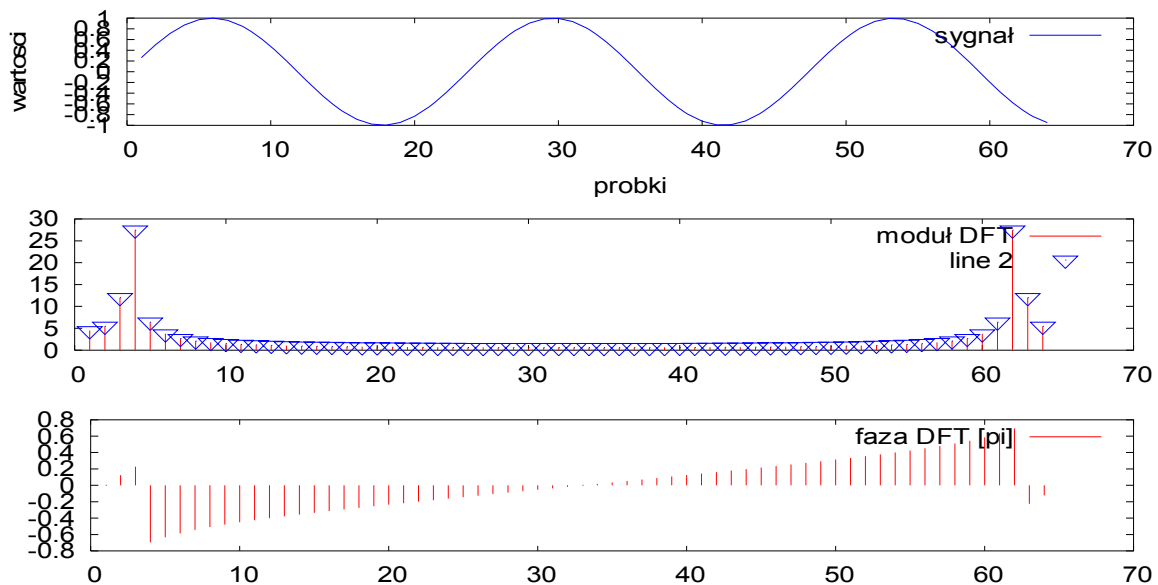
Aby zwiększyć rozdzielczość należy zwiększyć ilość próbek. Można to zrobić dodając do końca badanego sygnału próbki o wartości zero.

```
x2=zeros(1:N2);

for z=1:N
    x2(z)=x2(z)+x(z);
endfor

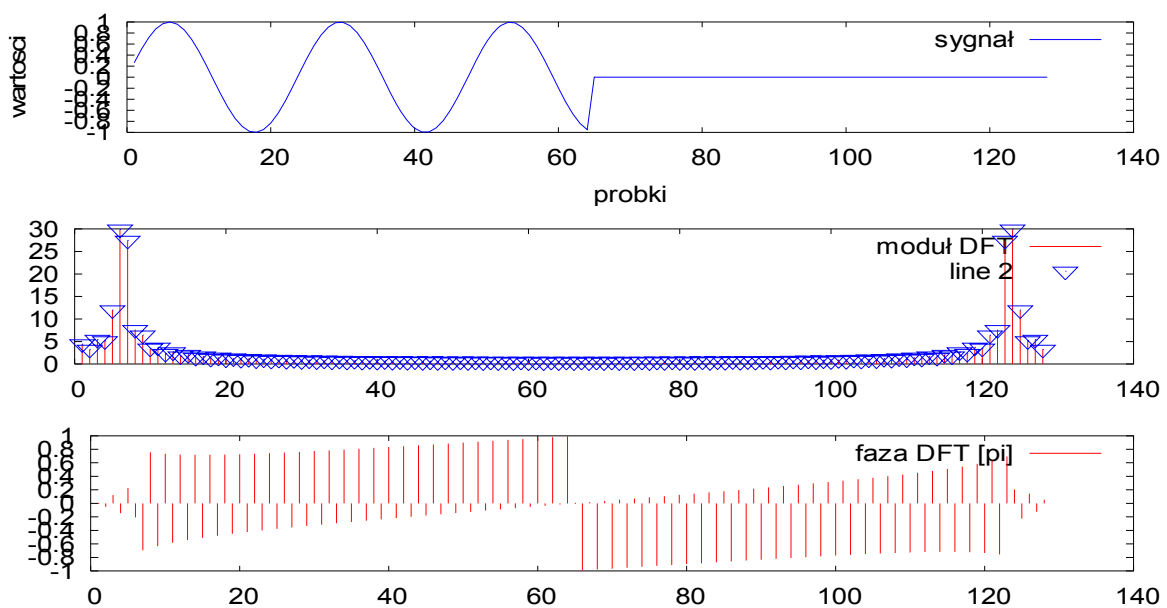
f=fft(x2);
```

Przed zwiększeniem rozdzielczości:



Rys. 6 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 2,7Hz; 64 próbki

Po zwiększeniu rozdzielczości:



Rys. 7 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 2,7Hz; 128 próbek

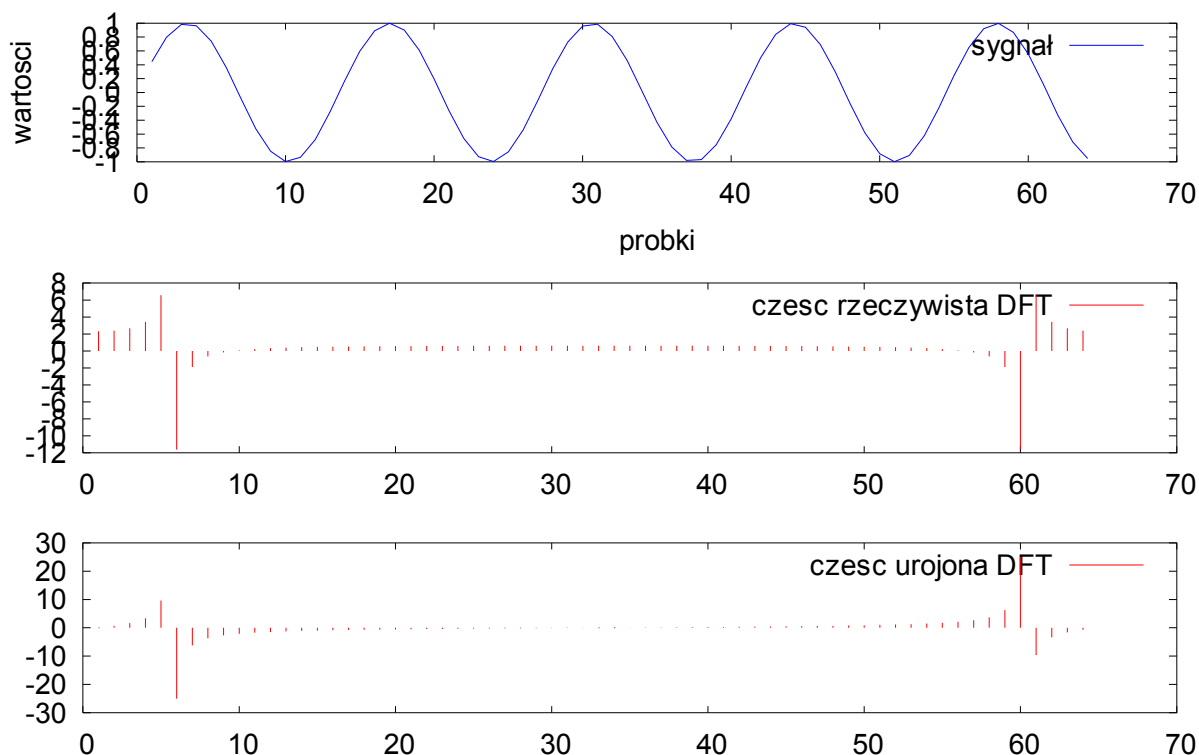
4. Zbadanie właściwości części rzeczywistej i urojonej DFT.

Parametry badanego sygnału sinusoidalnego:

$$f_{\text{syg}} = 4,7\text{Hz}$$

$$f_{\text{pr}} = 64\text{Hz}$$

$$N = 64$$

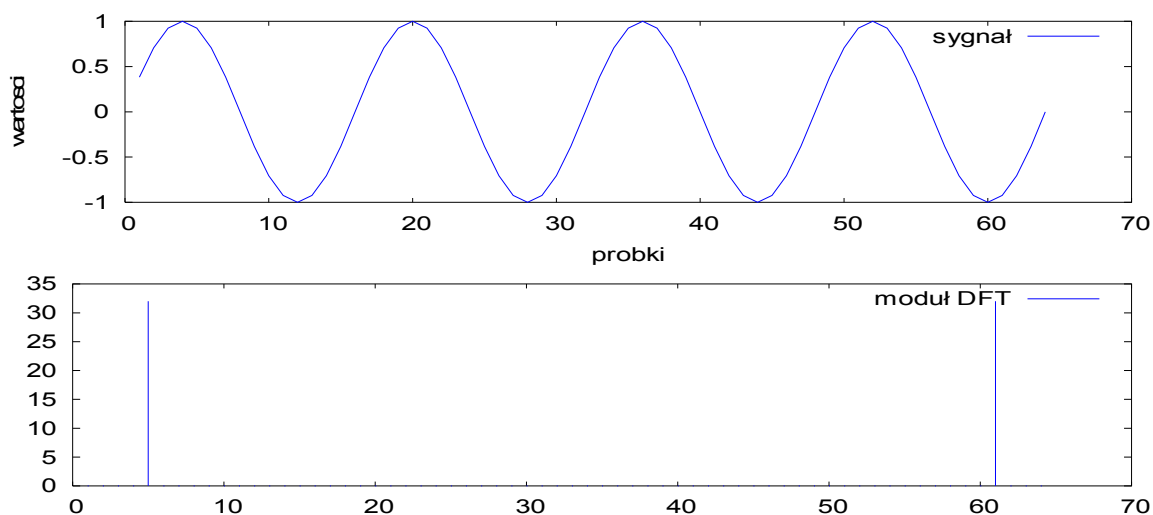
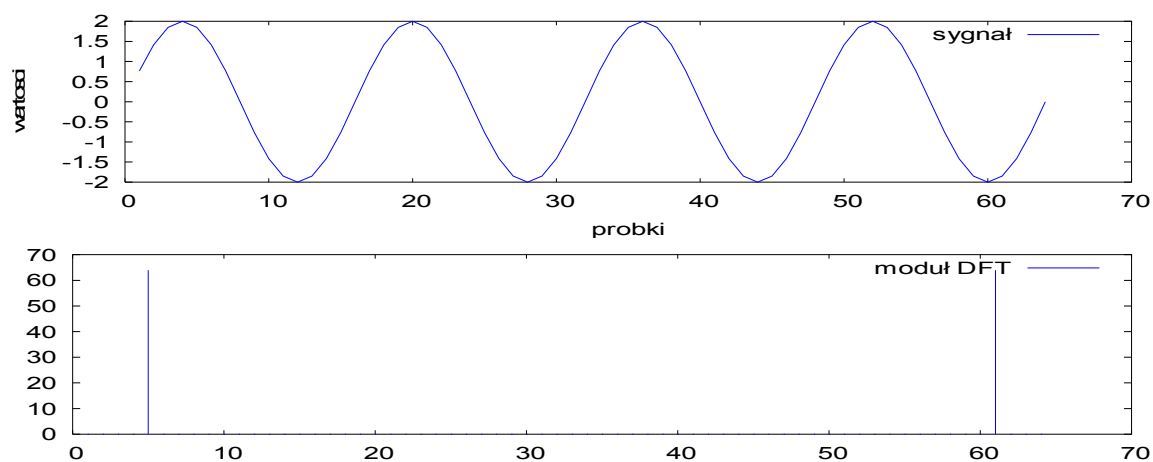
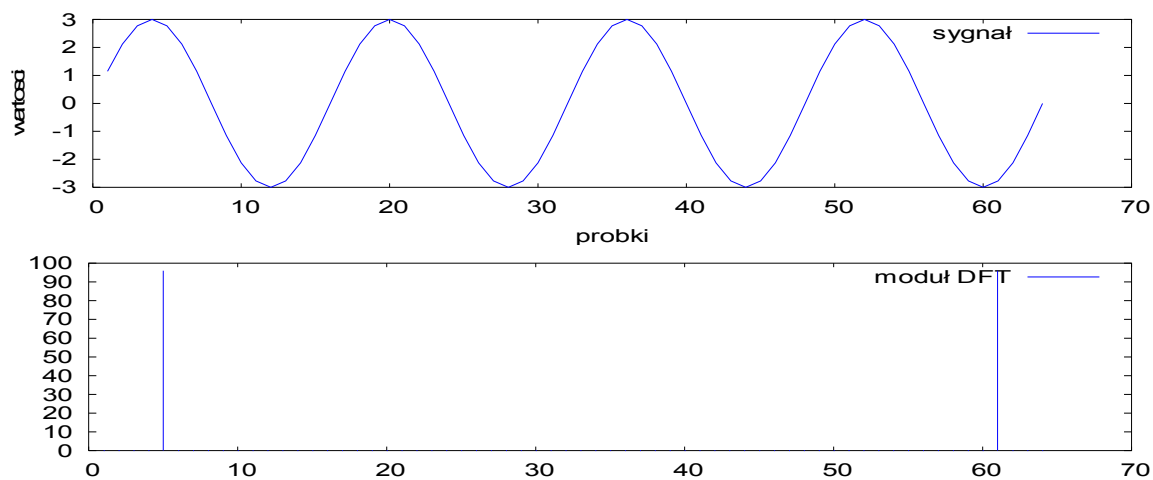


Rys. 8 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4,7Hz

Z rys. 8 widać, że część rzeczywista jest parzysta względem środkowych prążków. W przypadku części urojonej mamy do czynienia z nieparzystością. Występowanie części rzeczywistej oraz nieparzystości części urojonej jest spowodowane tym, że badano sygnał rzeczywisty. Należy pamiętać, że dla sygnału rzeczywistego prążki numerach $m \geq N/2$ są częścią nadmiarową. W przypadku części rzeczywistej występuje symetria parzysta, a dla części urojonej symetria nieparzysta.

Analiza wartości widma amplitudowego DFT.

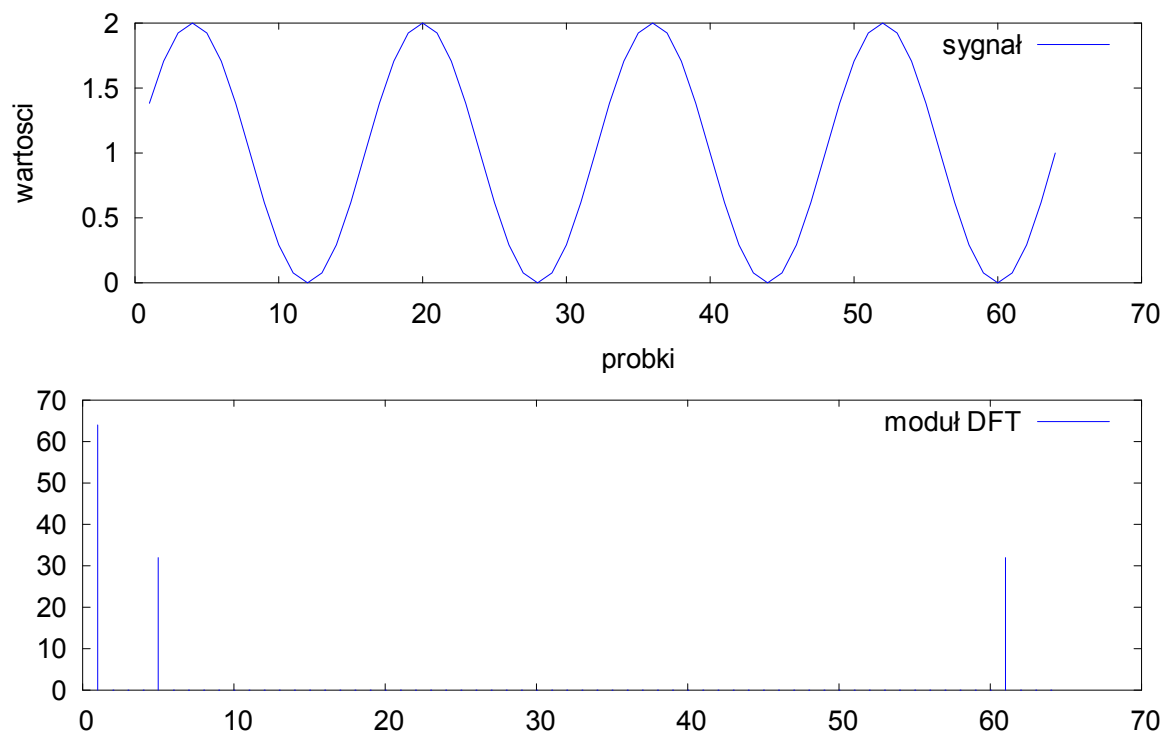
Do analizy użyto sygnału sinusoidalnego o częstotliwości 4Hz zmieniając jego amplitudę.

*Rys. 9 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4Hz i amplitudzie 1**Rys. 10 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4Hz i amplitudzie 2**Rys. 11 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4Hz i amplitudzie 3*

Jak widać z powyższych rysunków amplituda DFT nie jest identyczna z amplitudą sygnału wejściowego. Amplituda prążka jest jednak proporcjonalna do amplitudy sygnału wejściowego. Podwojenie i potrojenie amplitudy sygnału wejściowego powoduje także podwojenie i potrojenie sygnału wyjściowego DFT. Skalowanie prążków DFT zapisuje się jako:

$$A_{DFT} = A_{\text{syg}} \cdot \frac{N}{2}$$

W przypadku składowej stałej czynnikiem skalującym jest nie $\frac{N}{2}$ lecz N , tzn. jeśli do sygnału dodamy składową stałą o wartości B to $X(0) = N \cdot B$.

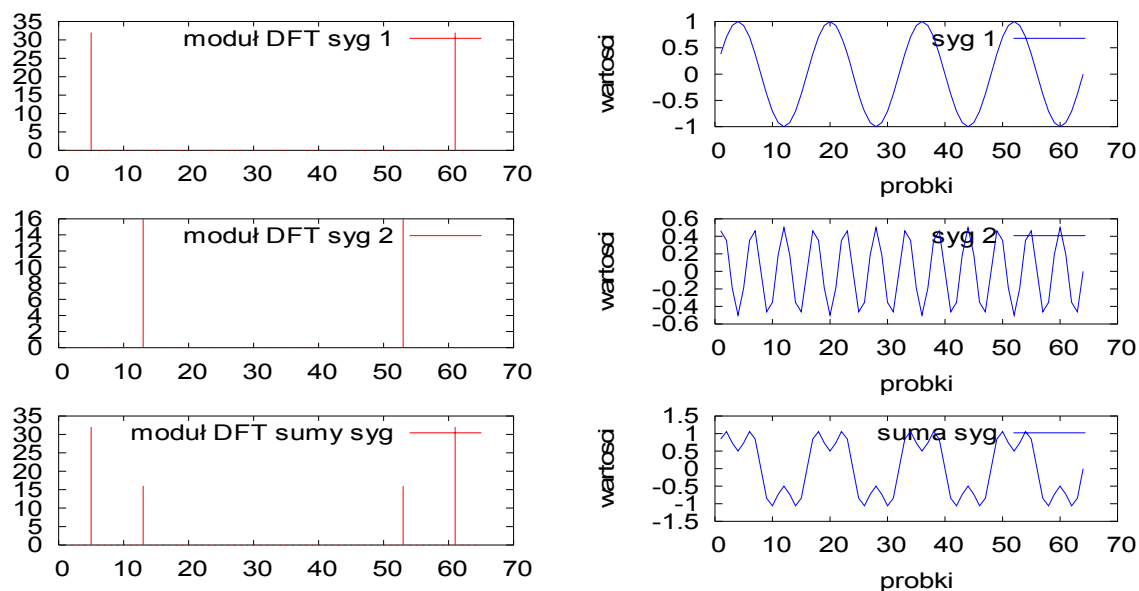


Rys. 12 DFT sygnał sinusoidalny o częstotliwości 4Hz i składowej stałej o wartości 1

Jako ciekawą obserwację należy dodać, że moduł DFT stracił symetrię parzystą po dodaniu do sygnału składowej stałej.

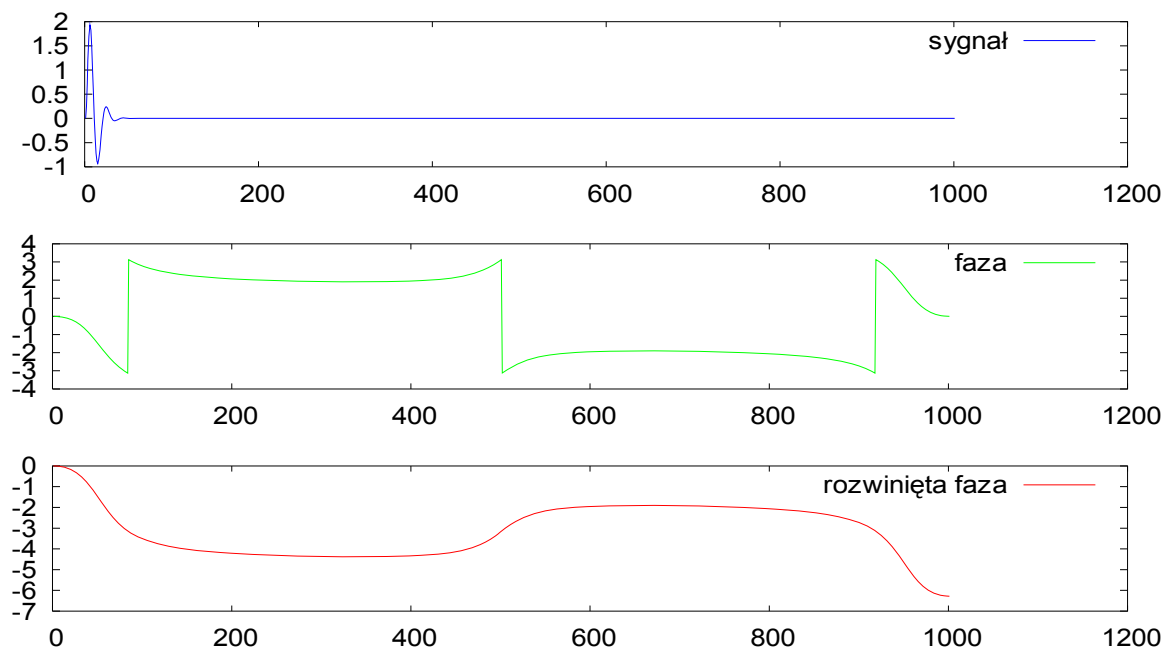
5. DFT sumy sygnałów.

DFT jest przekształceniem liniowym, dlatego suma transformat dwóch sygnałów sinusoidalnych x i y jest równa transformacie sygnału $x + y$. Dzięki tej właściwości można badać za pomocą DFT dowolny sygnał, ponieważ każdy sygnał można przedstawić jako sumę sinusoid.

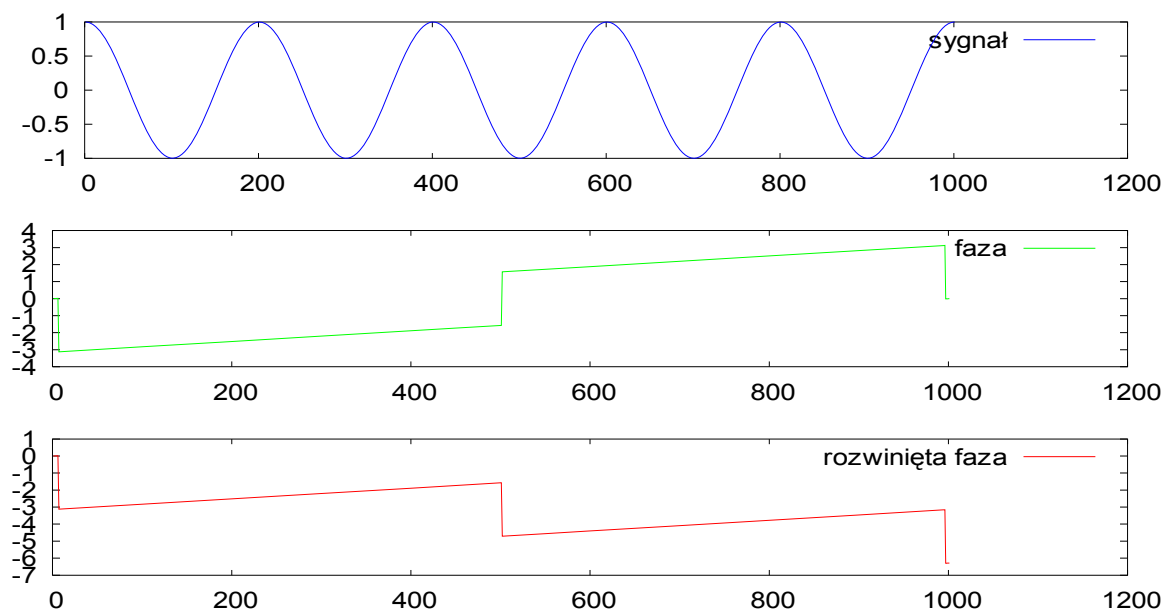


Rys. 12 DFT sumy sygnałów sinusoidalnych o częstotliwościach 4Hz i 12Hz

6. Widmo fazowe.



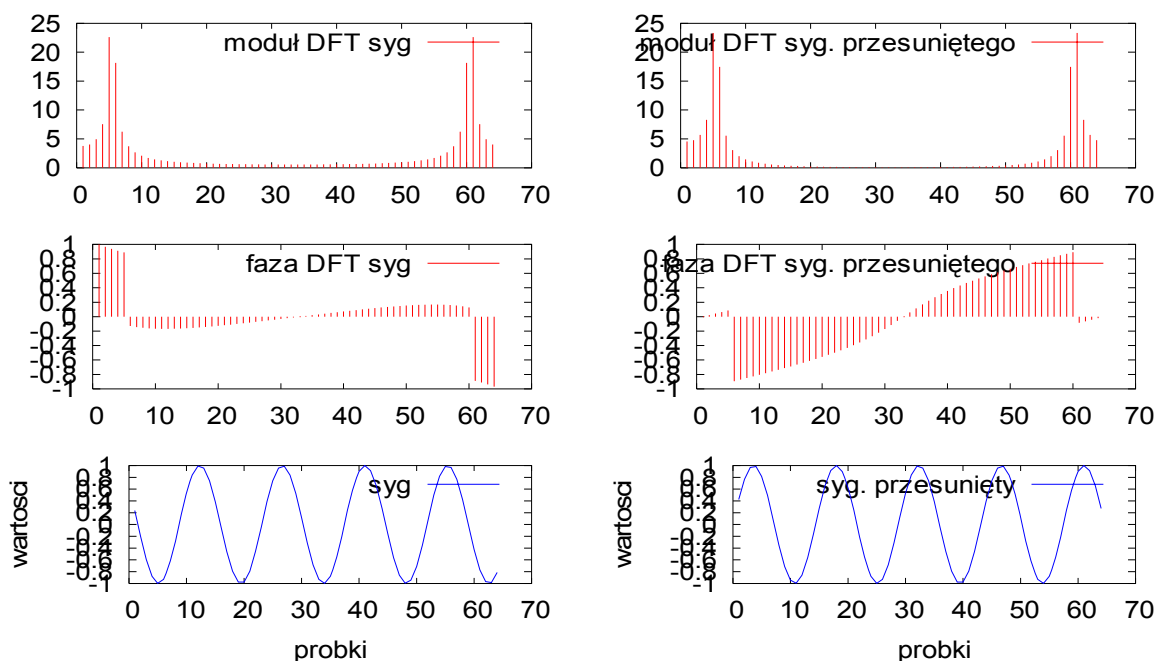
Rys. 13 Rozwinięcie fazy sinusoidy tłumionej



Rys. 14 Rozwinięcie fazy cosinusa

Na pierwszy rzut oka obie wykreślone fazy mają ze sobą niewiele wspólnego; jednak są to wykresy fazowe tego samego sygnału. Różnice biorą się między innymi z faktu, iż w przypadku funkcji 'unwrap' obliczana jest znormalizowana faza; dzięki temu unikamy zniekształceń i przekłamań.

7. Widmo sygnału przesuniętego w czasie.



Rys. 15 Sygnał przesunięty w czasie (o 20 próbek w prawo)

Jak widać z rys. 15 DFT przed i po przesunięciu w czasie, ma taki sam moduł a inną fazę. Przesunięcie w czasie zmienia natomiast fazę DFT. Oznacza to, że otrzymano empirystyczny dowód potwierdzający zasadność twierdzenia o przesunięciu:

$$X_k(m) = e^{j2\pi km/N} X(m)$$

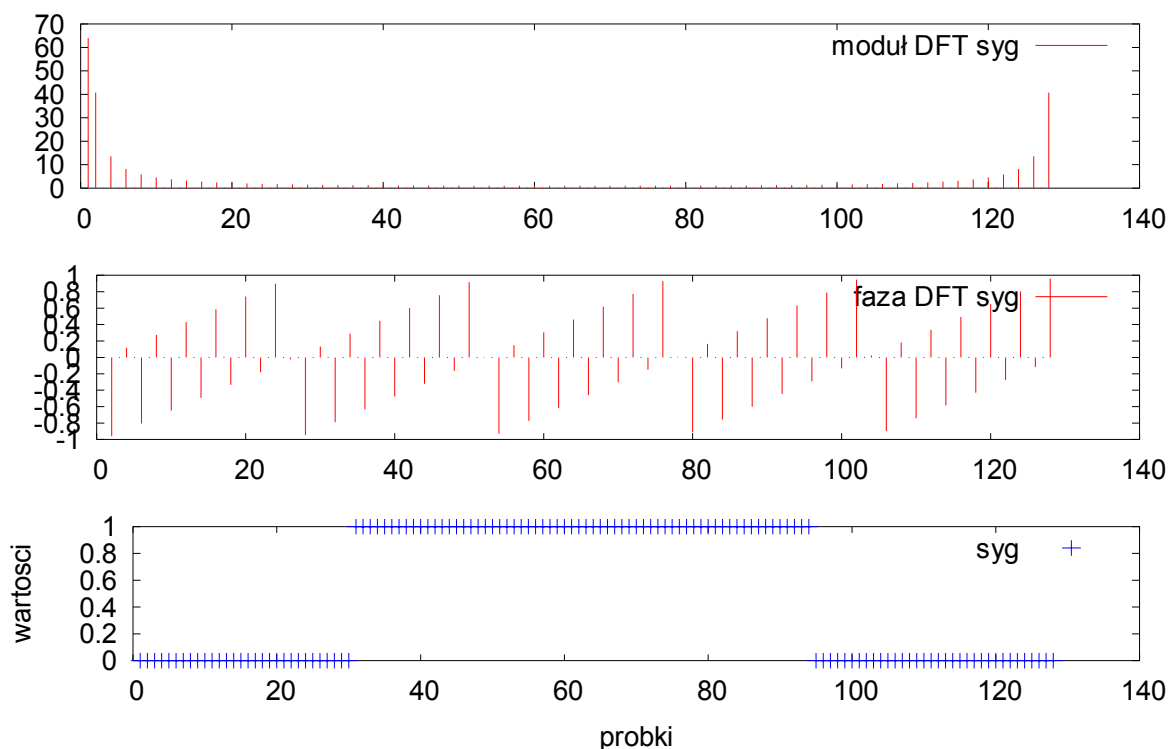
gdzie:

k – ilość próbek o ile przesunięto (liczba dodatnia przesunięcie w prawo, liczba ujemna przesunięcie w lewo)

X(m) – ciąg DFT przed przesunięciem

X_k(m) – ciąg DFT po przesunięciu

8. DFT funkcji okna prostokątnego.



Rys. 16 DFT okna prostokątnego

Z rys. 16 wynika, że DFT okna prostokątnego ma nieparzyście symetryczną fazę oraz prawie parzyście symetryczny moduł (nie powtarza się wartość X(0) odpowiadającej składowej stałej o wartości 1). Widoczne jest, że okienkowanie sygnału oknem prostokątnym będzie nosiło największe zakłócenia dla prążków o najmniejszych oraz największych częstotliwościach.

9. DFT sygnału zespolonego.

Parametry:

$$f_{\text{syg}} = 3\text{Hz}$$

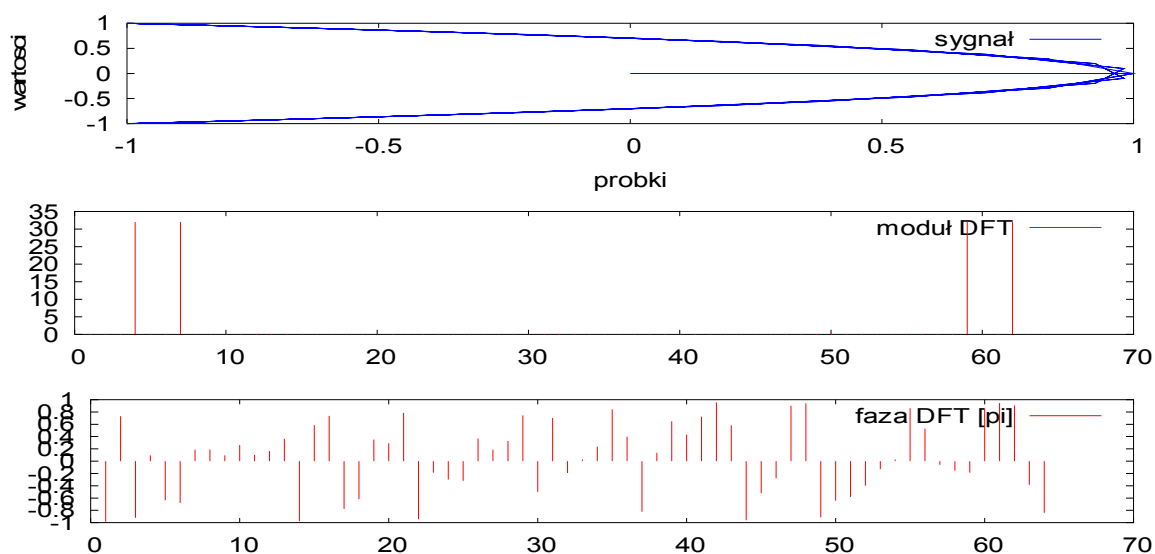
$$f_p = 64\text{Hz}$$

$$N = 64$$

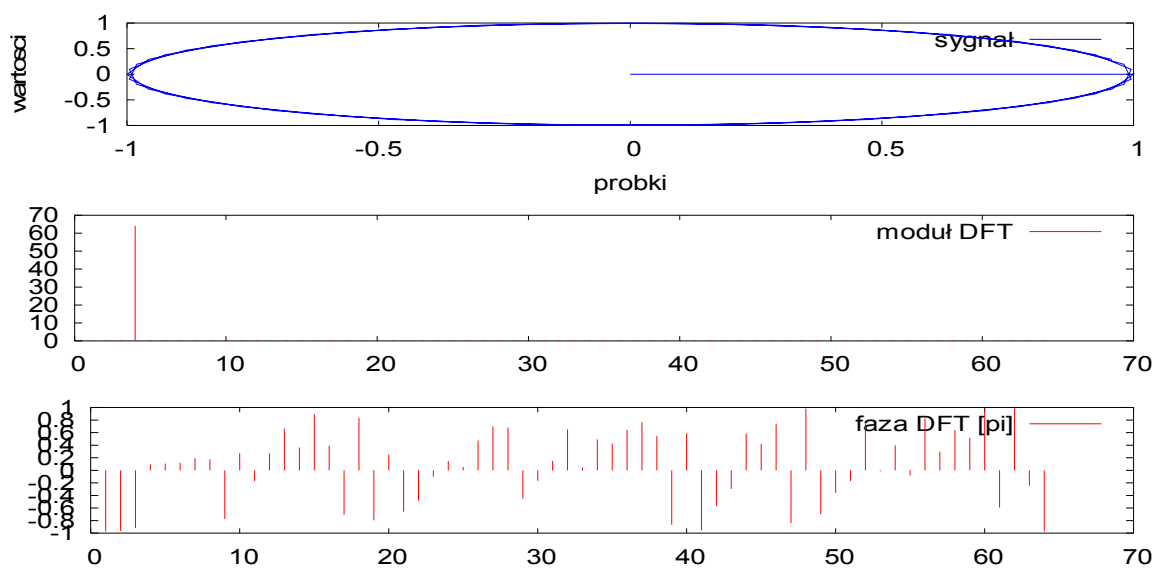
Badano sygnały:

$$y1 = i \cdot \sin(2\pi t / f_{\text{syg}}) + \cos(\pi t / f_{\text{syg}})$$

$$y2 = i \cdot \sin(2\pi t / f_{\text{syg}}) + \cos(2\pi t / f_{\text{syg}})$$



Rys. 17 DFT sygnału zespolonego y1

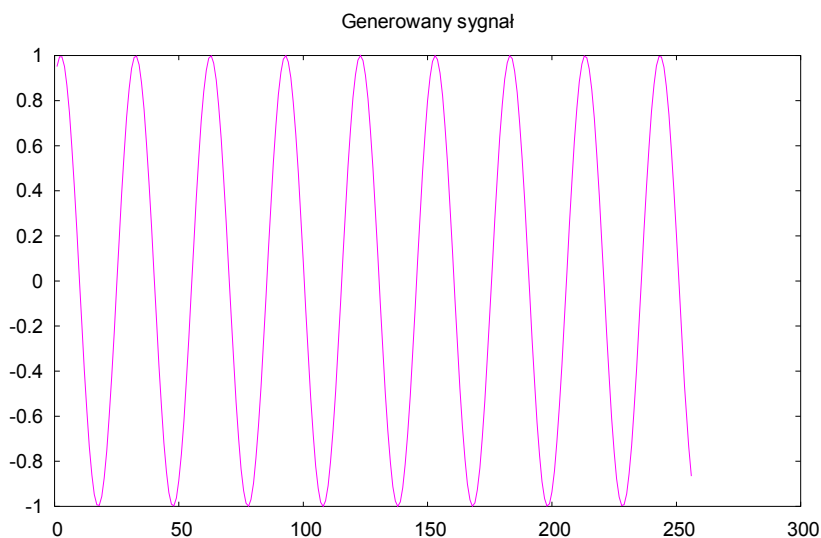


Rys. 18 DFT sygnału zespolonego y2

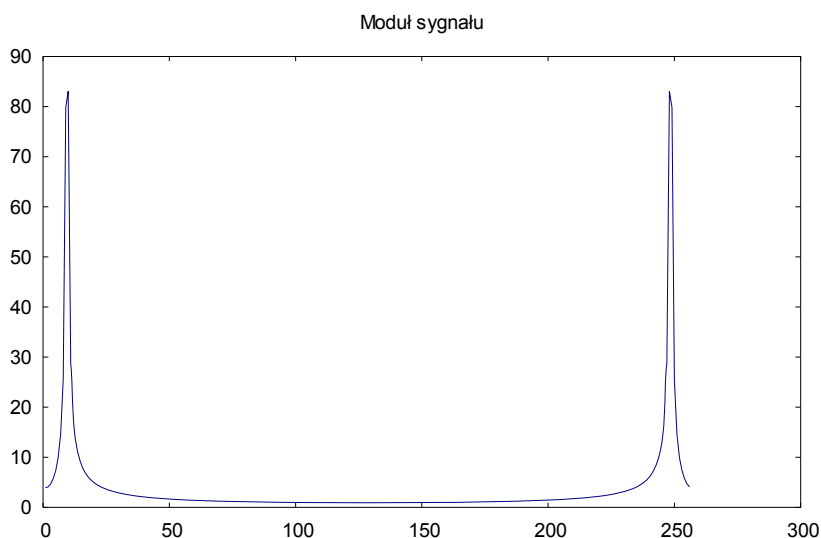
DFT sygnału zespolonego nie musi posiadać symetrii parzystą modułu oraz symetrii nieparzystej fazy. Dodatkowo, jeśli sygnał zespolony składa się z sumy rzeczywistego cosinusa i urojonego sinusa o tej samej częstotliwości amplituda prążka może być dwa razy większa. Oznacza to, że w przypadku DFT sygnału zespolonego nie można nic przewidzieć przed obliczeniami.

10. Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

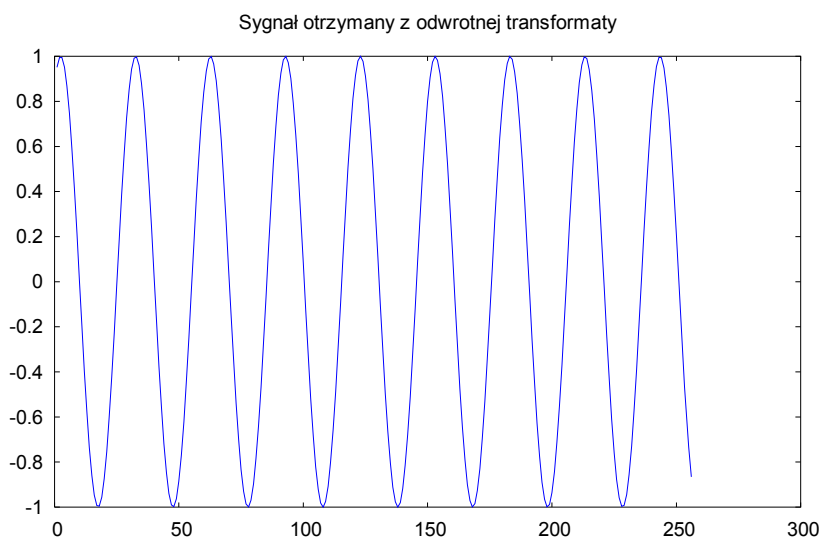
Dla sprawdzenia czy rzeczywiście transformata Fouriera jest operacją odwracalną poddano temu przekształceniu dwa różne sygnały, a następnie po zbadaniu modułu widma tych sygnałów poddano je przekształceniu odwrotnemu.



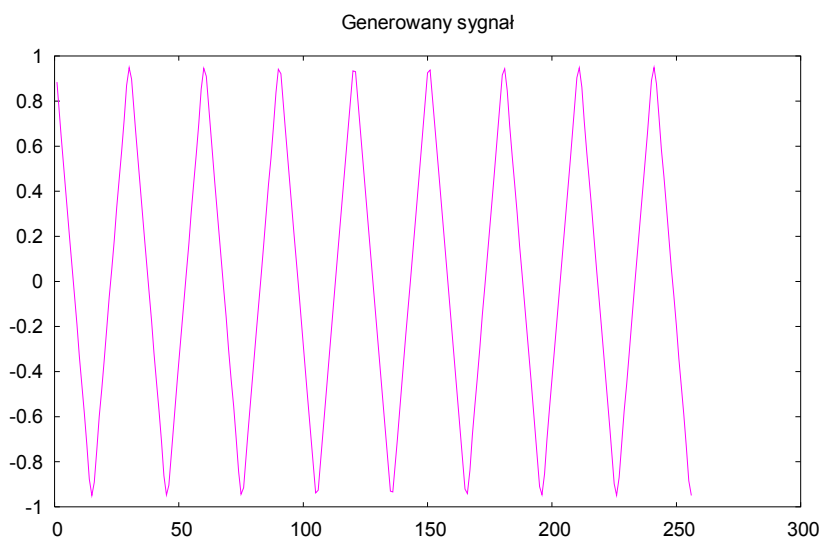
Rys.19 Sinusoida przed poddaniem transformacie Fouriera.



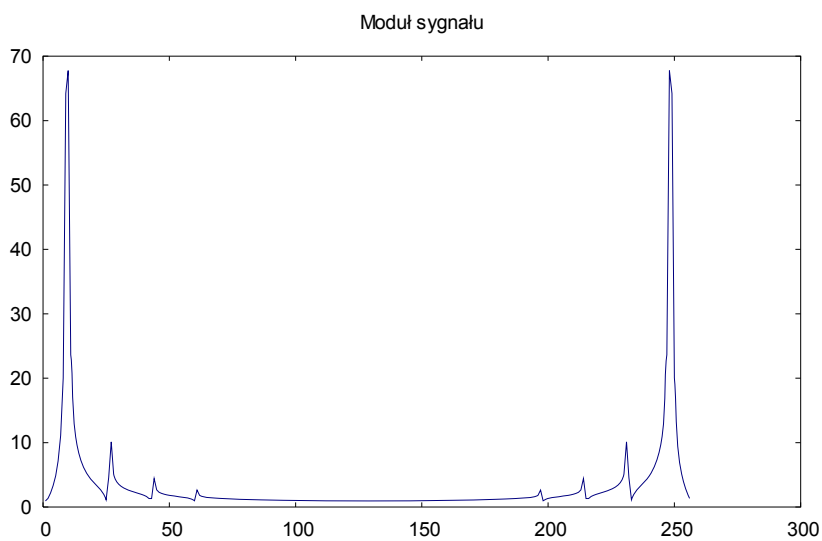
Rys. 20 Moduł widma badanej sinusoidy



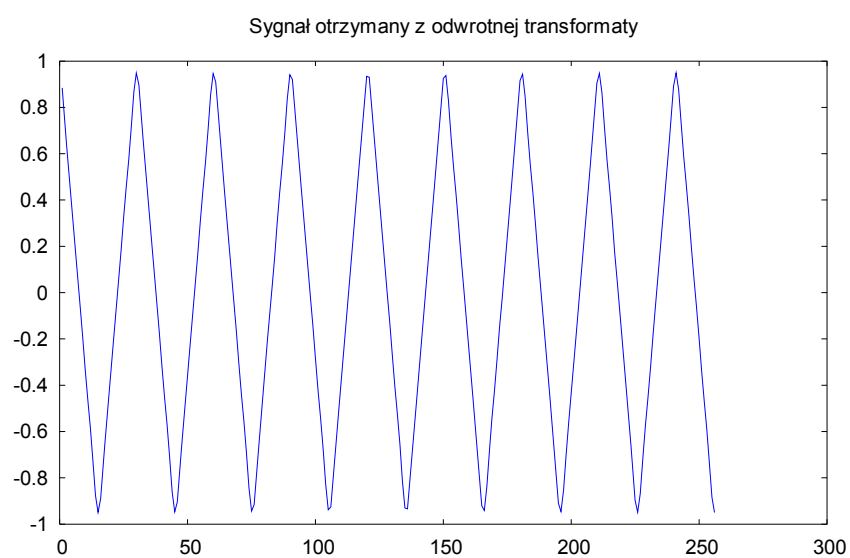
Rys. 21 Sinusoida po odtworzeniu za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera.



Rys. 22 Sygnał trójkątny przed poddaniem transformacie Fouriera.



Rys. 23 Moduł widma dla sygnału trójkątnego



Rys. 24 Sygnał trójkątny po odtworzeniu za pomocą odwrotnej transformaty Fouriera.

Transformata Fouriera jest, więc operacją odwracalną.